Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
2$^{\text{do}}$ Examen Parcial (36 %)
Ene-Mar 2018

Turno 3-4
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (4 ptos.) Halle $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Big(\ln(x)+\ln(x+2)-\ln\big(x^2+4\big)\Big)$

Solución: Dado que $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ y $\ln\big(a/b\big)=\ln(a)-\ln(b)$,

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\ln(x)+\ln(x+2)-\ln\big(x^2+4\big)\Big)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x(x+2)}{x^2+4}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+2)}{x^2+4}\right)=\ln(1)=0$$

ya que la función logaritmo es continua en todo su dominio.

Pregunta 2. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$

Solución:
$$x=2\sec(t)$$
$$\mathrm{d}x=2\sec(t)\tan(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\downarrow$$

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{4\big(\sec^2(t)-1\big)}}{2\sec(t)}\,2\sec(t)\tan(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int\tan^2(t)\,\mathrm{d}t=2\int\big(\sec^2(t)-1\big)\,\mathrm{d}t=2\big(\tan(t)-t\big)+C$$

$$=2\Big(\sqrt{\sec^2(t)-1}-t\Big)+C=\sqrt{x^2-4}-2\,\mathrm{arcsec}\big(x/2\big)+C$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 3. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \cos\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x$

Solución: Integrando por partes se tiene,

$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos\big(\ln(x)\big) & f'(x)=-\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)\,\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=1 & g(x)=x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \cos\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x &\overset{\downarrow}{=} x\cos\big(\ln(x)\big)+\int \operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &\underset{\uparrow}{=} x\cos\big(\ln(x)\big)+x\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)-\int \cos\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} f(x)=\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big) & f'(x)=\cos\big(\ln(x)\big)\,\dfrac{1}{x} \\ g'(x)=1 & g(x)=x \end{array}$$

por lo que

$$2\int \cos\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x = x\cos\big(\ln(x)\big)+x\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)+C$$

de donde

$$\int \cos\big(\ln(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\Big(\cos\big(\ln(x)\big)+\operatorname{sen}\big(\ln(x)\big)\Big)+C$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 4. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\,\sqrt{7\cos^3(x)}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3(x)\,\sqrt{7\cos^3(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \operatorname{sen}^2(x)\,\sqrt{7\cos^3(x)}\,\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{7}\int \big(1-\cos^2(x)\big)\cos^{3/2}(x)\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{7}\int \Big(\cos^{3/2}(x)-\cos^{7/2}(x)\Big)\operatorname{sen}(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\sqrt{7}}{5}\cos^{5/2}(x)+\frac{2\sqrt{7}}{9}\cos^{9/2}(x)+C \end{aligned}$$

para cualquier valor de $C\in\mathbb{R}$.

Pregunta 5. (8 ptos.) Halle $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x+1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} \\
&= -\frac{2}{x-1} - \frac{3/2}{(x-1)^2} + K
\end{aligned}$$

para cualquier valor de $K \in \mathbb{R}$, ya que

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

vale para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ si, y sólo si, $A = 0$, $B = 2$ y $C = 3$.